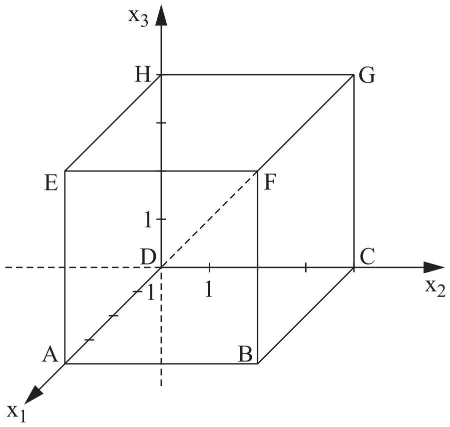
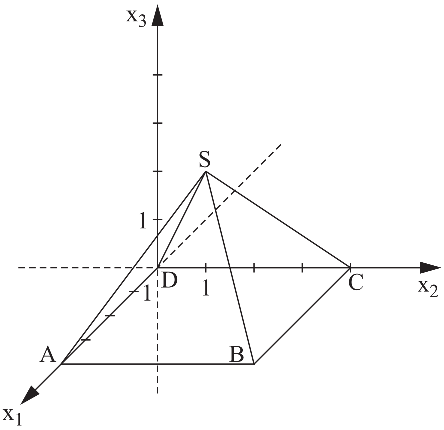
**Lösungen zu der Stationsarbeit:**

**Parametergleichungen von Geraden/Lagebeziehung von Geraden**

### Lösung zur Pflichtaufgabe 2

a)




b) Würfel:
A(4 | 0 | 0), B(4 | 4 | 0), C(0 | 4 | 0), D(0 | 0 | 0), E(4 | 0 | 4), F(4 | 4 | 4), G(0 | 4 | 4), H(0 | 0 | 4)

Pyramide:
A(4 | 0 | 0), B(4 | 4 | 0), C(0 | 4 | 0), D(0 | 0 | 0), S(2 | 2 | 3)

c) Die Parametergleichungen g: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ bestehen aus dem Stützvektor $\vec{p}$ und dem Richtungsvektor $\vec{u}$. Da es hier viele richtige Lösungen gibt, sind jeweils zwei oder drei (sinnvolle) Möglichkeiten angegeben.

**Würfel:**

| Gerade | $\vec{p}$ | $\vec{u}$ | Gerade | $\vec{p}$ | $\vec{u}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| AB | $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ | CG | $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ |
| BC | $\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ | DH | $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ |
| CD | $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ | EF | $\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ |
| DA | $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ | FG | $\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ |
| AE | $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ | GH | $\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ |
| BF | $\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ | HE | $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ |

**Pyramide:**

| Gerade | $\vec{p}$ | $\vec{u}$ | Gerade | $\vec{p}$ | $\vec{u}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| AB | $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ | AS | $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}$ |
| BC | $\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ | BS | $\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| CD | $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ | CS | $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$ |
| DA | $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ | DS | $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix}$ |

d) siehe Schrägbild

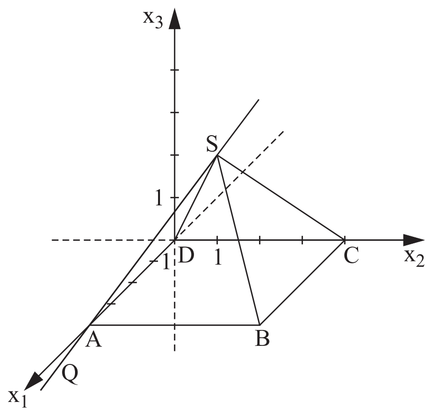
**Lösung zur Pflichtaufgabe 3**

a) Die Punkte A und S liegen auf der Kantengeraden AS, und zwar am Anfang und am Ende der Kante. Die Punkte B, C und D liegen nicht auf AS.

b) $A \in AS$, $S \in AS$
$B \notin AS$, $C \notin AS$, $D \notin AS$

c) Liegt die Planetenposition auf der Flugbahn, landet (bzw. zerschellt) die Raumsonde auf dem Planeten und kann z. B. dessen Atmosphäre oder Oberfläche untersuchen.
Liegt die Planetenposition nicht auf der Flugbahn, fliegt die Raumsonde am Planeten vorbei und kann z. B. Fotos anfertigen oder das Magnetfeld analysieren.
Weitere Anwendungsbeispiele:
Flugbahnen von Flugzeugen (Landung, …) oder Geschossen (Treffer, …), Lichtstrahlen (Beleuchtung, …), …

d) Gerade AS: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$




r = 0:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A(4 | 0 | 0) ist Anfangspunkt der Strecke $\overline{AS}$.

r = 1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ S(2 | 2 | 3) ist Endpunkt der Strecke $\overline{AS}$.

r = 0,5:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1{,}5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ P(3 | 1 | 1,5) ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AS}$.

r = –1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Q(6 | –2 | –3) liegt auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AS}$ über A hinaus (entgegengesetzt zu S).

e) Die Gerade AB verläuft waagrecht in der $x_1$-$x_2$-Ebene, der Punkt S liegt aber nicht in der $x_1$-$x_2$-Ebene. Oder: Der Punkt S hat die $x_3$-Koordinate 3, die Punkte auf AB liegen aber alle tiefer mit $x_3 = 0$.

AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$, S(2 | 2 | 3)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{array}{ll}\text{(I)} & 2=4\\ \text{(II)} & 2=4r\\ \text{(III)} & 3=0\end{array}$$

Anhand von (I) oder (III) kann man schnell erkennen, dass dieses LGS keine Lösung hat. Der Punkt S liegt demnach nicht auf der Geraden AB.

f) Der Punkt R liegt auf der $x_1$-Achse in der Verlängerung der Kante $\overline{AD}$, also auf der Geraden AD.

$$AD: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad R(5 \mid 0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{array}{ll}\text{(I)} & 5=4-4r\\ \text{(II)} & 0=0\\ \text{(III)} & 0=0\end{array}$$

Aus (I) ergibt sich, dass dieses LGS die Lösung $r = -\ 0{,}25$ hat. Die Proben in (II) und (III) stimmen offensichtlich.

g) Gleichung der Geraden AS:

$$AS: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad P_1(1 \mid 3 \mid 4{,}5)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{array}{ll}\text{(I)} & 1=4-2r\\ \text{(II)} & 3=2r\\ \text{(III)} & 4{,}5=3r\end{array}$$

In (I), (II) und (III) ergibt sich jeweils $r = 1{,}5 \Rightarrow P_1 \in AS$

$$AS: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad P_2(0 \mid 4 \mid 5{,}5)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\4\\5{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{array}{ll}\text{(I)} & 0=4-2r\\ \text{(II)} & 4=2r\\ \text{(III)} & 5{,}5=3r\end{array}$$

Aus (I) und (II) ergibt sich $r = 2$, aus (III) $r \approx 1{,}8 \Rightarrow$ das LGS hat keine Lösung: $P_2 \notin AS$

**Lösung zur Pflichtaufgabe 4**

a)

| g | h | Beschreibung der Lagebeziehung |
|---|---|---|
| AB | AS | schneiden sich im Punkt A |
| AB | BS | schneiden sich im Punkt B |
| AB | CS | schneiden sich nicht, nicht parallel (windschief) |
| AB | DS | schneiden sich nicht, nicht parallel (windschief) |
| AB | AB | sind identisch |
| AB | BC | schneiden sich im Punkt B |
| AB | CD | sind parallel |
| AB | DA | schneiden sich im Punkt A |
| BC | AS | schneiden sich nicht, nicht parallel (windschief) |
| BC | BS | schneiden sich im Punkt B |
| BC | CS | schneiden sich im Punkt C |
| BC | DS | schneiden sich nicht, nicht parallel (windschief) |

| | | |
|---|---|---|
| BC | AB | schneiden sich im Punkt B |
| BC | BC | sind identisch |
| BC | CD | schneiden sich im Punkt C |

b) Die Lagebeziehungen unterscheiden sich

- nach Anzahl der Schnittpunkte:
  kein Schnittpunkt $\Rightarrow$ Geraden sind parallel oder windschief
  ein Schnittpunkt $\Rightarrow$ Geraden sind schneiden sich
  unendlich viele Schnittpunkte $\Rightarrow$ Geraden sind identisch
- nach den Richtungsvektoren:
  dieselbe Richtung $\Rightarrow$ Geraden sind parallel oder identisch
  nicht dieselbe Richtung $\Rightarrow$ Geraden schneiden sich oder sind windschief

c) Es gibt für zwei Geraden g: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$ vier mögliche Lagebeziehungen:

- g und h sind identisch.
  $\Leftrightarrow$ unendlich viele Schnittpunkte, Richtungsvektoren kollinear
- g und h schneiden sich.
  $\Leftrightarrow$ ein Schnittpunkt, Richtungsvektoren nicht kollinear
- g und h sind parallel (nicht identisch).
  $\Leftrightarrow$ kein Schnittpunkt, Richtungsvektoren kollinear
- g und h sind windschief.
  $\Leftrightarrow$ kein Schnittpunkt, Richtungsvektoren nicht kollinear

Vorgehensweise:

1. Die Geraden werden auf gemeinsame Punkte untersucht. Dazu werden die Geradengleichungen gleichgesetzt: $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + s\vec{v}$
2. Um die Werte der Parameter r und s zu bestimmen, wird die Vektorgleichung in ein LGS umgewandelt.
3. Das LGS wird gelöst.
4. Wenn das LGS keine Lösung hat, wird zusätzlich untersucht, ob die Richtungsvektoren kollinear sind, d. h. ob sie Vielfache voneinander sind (genauer: ob es ein $k \in 0$ mit $\vec{u} = k\vec{v}$ gibt).
5. Schlussüberlegung:
   - Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
     $\Rightarrow$ g und h sind identisch.
   - Das LGS hat genau eine Lösung.
     $\Rightarrow$ g und h schneiden sich.
     Zusätzlich kann der Schnittpunkt durch Einsetzen der Parameter in die Geradengleichung (z. B. r in g oder s in h) bestimmt werden.
   - Das LGS hat keine Lösung, die Richtungsvektoren sind kollinear.
     $\Rightarrow$ g und h sind parallel (nicht identisch).
   - Das LGS hat keine Lösung, die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.
     $\Rightarrow$ g und h sind windschief.

d)

| | |
|---|---|
| identisch: | AB /AB, BC /BC |
| schneiden sich: | AB /AS, AB /BS, AB /BC, AB /DA, BC /BS, BC /CS, BC /AB, BC /CD |
| parallel: | AB /CD, BC /DA |
| windschief: | AB /CS, AB /DS, BC /AS, BC /DS |

e) *identisch:* Die beiden Flugzeuge fliegen mit dem nötigen Sicherheitsabstand auf derselben Route hintereinander.
*schneiden sich:* Die Flugrouten der beiden Flugzeuge kreuzen sich – es besteht Kollisionsgefahr. Die Flugzeuge dürfen nicht zur selben Zeit den Schnittpunkt passieren.
*echt parallel:* Die Flugrouten z. B. über dem Nordatlantik verlaufen parallel (nebeneinander und übereinander), wobei auch hier der nötige Sicherheitsabstand einzuhalten ist.
*windschief:* Die Flugrouten z. B. von Zürich nach Hamburg und von Paris nach München kreuzen sich nicht, wenn man in unterschiedlichen Höhen fliegt.

f) BC ist die Verlängerung der rechten Kante, DA die Verlängerung der linken Kante. Da die Grundfläche ein Quadrat ist (also parallele Seiten besitzt), sind BC und DA parallel.

$$\text{BC: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{DA: } \vec{x} = s\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 - 4r = 4s \\ \text{(II)} & 4 = 0 \\ \text{(III)} & 0 = 0 \end{array}$$

Dieses LGS hat keine Lösung (wegen (II): 4 = 0 Widerspruch!). Da die Richtungsvektoren kollinear sind, sind BC und DA parallel.

g) BC ist die Verlängerung der rechten Kante, DS verlängert die Kante, die vom Punkt links hinten zur Spitze S führt. DS schneidet BC nicht und hat zudem eine andere Richtung.

$$\text{BC: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{DS: } \vec{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 - 4r = 2s \\ \text{(II)} & 4 = 2s \\ \text{(III)} & 0 = 3s \end{array}$$

Aus (III) ergibt sich:

$s = 0$

Eingesetzt in (II) erhält man den Widerspruch $4 = 0$! Dieses LGS hat keine Lösung. Da die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, müssen BC und DS windschief sein.

h) $\quad DS: \vec{x} = s\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\6\\7\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll}\text{(I)} & 1+4r = 2s\\ \text{(II)} & 6r = 2s\\ \text{(III)} & 1+7r = 3s\end{array}$

Um dieses LGS mit zwei Unbekannten zu lösen, bestimmt man aus (I) und (II) die Werte für r und s und überprüft diese Lösung in (III):

$$\begin{array}{llll}\text{(I)} & 1+4r = 2s & & \Rightarrow 1+2 = 2s \Rightarrow s = 1{,}5\\ \text{(II)}-\text{(I)} & -1+2r = 0 & \Rightarrow r = 0{,}5 & \\ \text{(III)} & 1+7r = 3s & & \Rightarrow 1+3{,}5 = 4{,}5\ (\text{w})\end{array}$$

Dieses LGS hat eine Lösung für r = 0,5 und s = 1,5.

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, setzt man z. B. s = 1,5 in die Geradengleichung von DS ein:

$$\vec{x} = 1{,}5\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\4{,}5\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt liegt bei (3 | 3 | 4,5) (über der Pyramide).

i) $\quad DS: \vec{x} = s\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}1\\1\\1{,}5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1{,}5\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll}\text{(I)} & 1-r = 2s\\ \text{(II)} & 1-r = 2s\\ \text{(III)} & 1{,}5-1{,}5r = 3s\end{array}$

Um dieses LGS zu lösen, kann man z. B. Gleichung (I) nach r auflösen und in (II) und (III) einsetzen:

$$\begin{array}{lllll}\text{(I)} & 1-r = 2s & \Rightarrow & r = 1-2s & \\ \text{(II)} & 1-r = 2s & \Rightarrow & 1-1+2s = 2s & \Rightarrow 0 = 0\\ \text{(III)} & 1{,}5-1{,}5r = 3s & \Rightarrow & 1{,}5-1{,}5+3s = 3s & \Rightarrow 0 = 0\end{array}$$

Dieses LGS hat unendlich viele Lösungen, die Geraden sind identisch.

**Lösung zur Vertiefungsaufgabe 1, Teilaufgabe d**

a) Es ergibt sich ein LGS in Standardform mit drei Unbekannten und damit eine $3 \times 4$-Koeffizientenmatrix A:

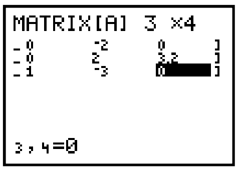
$$\begin{pmatrix}x_1\\0{,}8\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{ll}\text{(I)} & x_1 = 2r\\ \text{(II)} & 0{,}8 = 4-2r\\ \text{(III)} & x_3 = 3r\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 0\cdot x_3 - 2r = 0\\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_3 + 2r = 3{,}2\\ 0\cdot x_1 + x_3 - 3r = 0\end{array} \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3{,}2\\ 0 & 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

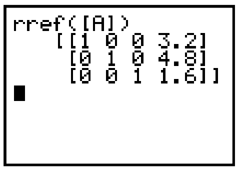
Die erste Spalte gehört zu $x_1$, die zweite zu $x_3$, die dritte zu r, die vierte zu den Konstanten.

Beim TI-83:

Matrix im GTR (die 1. Spalte ist hier nicht sichtbar):




Diagonalisiert:




In der ersten Zeile ergibt sich $x_1 = 3{,}2$, in der zweiten Zeile $x_3 = 4{,}8$ und in der dritten Zeile $r = 1{,}6 \;\Rightarrow\; T(3{,}2 \mid 0{,}8 \mid 4{,}8)$

b) Das Einsetzen von U in die Geradengleichung von BS führt zu einem LGS mit zwei Unbekannten, also zu einer $3 \times 3$-Koeffizienten-Matrix A:

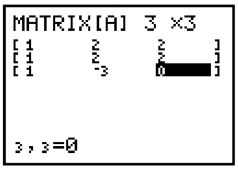
$$\begin{pmatrix}2+u\\2+u\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{ll}\text{(I)} & 2+u=4-2r\\ \text{(II)} & 2+u=4-2r\\ \text{(III)} & u=3r\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{array}{r}u+2r=2\\ u+2r=2\\ u-3r=0\end{array} \quad\Rightarrow\quad A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&2\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

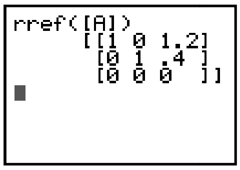
Die erste Spalte gehört zu u, die zweite zu r, die dritte zu den Konstanten.

Beim TI-83:

Matrix im GTR:




Diagonalisiert:




In der ersten Zeile ergibt sich u = 1,2, in der zweiten Zeile r = 0,4 und in der dritten Zeile erkennt man, dass die Probe stimmt.

Damit ist auch geklärt, dass für u = 1 der Punkt U nicht auf der Geraden liegt, da u = 1 keine Lösung des LGS ist.

c) Setzt man die Koordinaten des Punktes V mit der Geraden DS gleich, so ergibt sich:

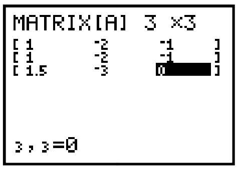
$$\begin{pmatrix}1+v\\1+v\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll}\text{(I)} & 1+v=2r\\ \text{(II)} & 1+v=2r\\ \text{(III)} & 1{,}5v=3r\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{array}{r}v-2r=-1\\ v-2r=-1\\ 1{,}5v-3r=0\end{array} \quad\Rightarrow\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&-2&-1\\1{,}5&-3&0\end{pmatrix}$$

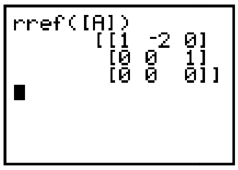
Die erste Spalte gehört zu v, die zweite zu r, die dritte zu den Konstanten.

Beim TI-83:

Matrix im GTR:




Diagonalisiert:

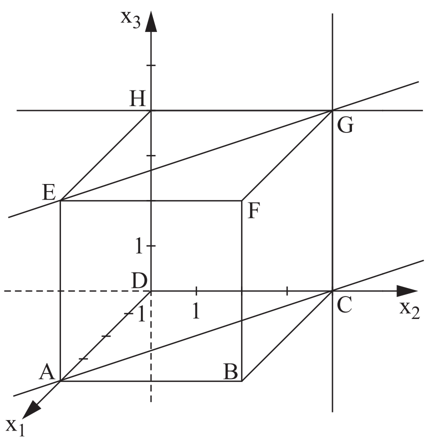



In der zweiten Zeile ergibt sich der Widerspruch 0 = 1, das LGS hat demnach keine Lösung. Der Punkt V liegt somit nie auf der Geraden DS – egal, welchen Wert v hat.

**Lösung zur Vertiefungsaufgabe 2**

a) Das Schaubild zeigt:

AC und CG sowie AC und AG schneiden sich,
AC und EG sind parallel,
AC und HG, AC und FG, AC und DG sowie
AC und BG sind windschief.




b) **$h_1$ soll g schneiden:** Q(1 | 1 | 1) liegt auf g.
Mögliche Lösung:

$h_1 = PQ\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

**$h_2$ soll parallel zu g sein:** Man wählt für $h_2$ den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ von g.
Mögliche Lösung:

$$h_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

**$h_3$ soll windschief zu g sein:**

*1. Lösungsversuch:*

$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ ist nicht kollinear zu $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ (Richtungsvektor von g) $\Rightarrow\ h_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

Probe:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad 1+r = 1+s \quad \Rightarrow\ r = s \quad \Rightarrow\ s = -0{,}5\\
\Rightarrow\ &\text{(II)} \quad 1+2r = 0 \quad \Rightarrow\ r = -0{,}5\\
&\text{(III)} \quad 1+3r = 1+3s \quad \Rightarrow\ -0{,}5 = -0{,}5\ \text{(w)}
\end{aligned}$$

Das LGS hat eine Lösung, die Geraden schneiden sich und sind deshalb nicht windschief.

*2. Lösungsversuch:*

Damit die Probe beim zweiten Versuch in der dritten Zeile nicht mehr stimmt, kann man beim Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ den $x_3$-Koeffizienten z. B. in $x_3 = 2$ verändern:

$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ ist immer noch nicht kollinear zu $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\ h_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Probe:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad 1+r = 1+s \quad \Rightarrow\ s = -0{,}5\\
\Rightarrow\ &\text{(II)} \quad 1+2r = 0 \quad \Rightarrow\ r = -0{,}5\\
&\text{(III)} \quad 1+3r = 1+2s \quad \Rightarrow\ -0{,}5 = 0\ \text{(f)}
\end{aligned}$$

Dieses LGS hat keine Lösung, g und $h_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ sind windschief.

c) Zunächst kann man die Richtungsvektoren untersuchen. Sie sind für a = 2 kollinear. Daher kann man für a = 2 untersuchen, ob die Geraden g und $h_2$ identisch oder parallel sind:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad 1+r = 1+s \quad \Rightarrow\ r = s\\
\Rightarrow\ &\text{(II)} \quad 1+2r = 2s \quad \Rightarrow\ 1+2s = 2s \quad \Rightarrow\ 1 = 0\ \text{(f)}\\
&\text{(III)} \quad 1+3r = 1+3s
\end{aligned}$$

Dieses LGS hat keine Lösung. Für a = 2 sind die Geraden parallel.
Für a ≠ 2 untersucht man, ob sich $h_a$ und g schneiden oder ob $h_a$ windschief zu g ist:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad 1+r = 1+s\\
\Rightarrow\ &\text{(II)} \quad 1+2r = sa\\
&\text{(III)} \quad 1+3r = 1+3s\\
&\text{(II)} - 2\cdot\text{(I)} \quad -1 = -2 + s(a-2) \quad \Rightarrow\ 1 = s(a-2)
\end{aligned}$$

Um weiter aufzulösen, muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden:

*1. Fall:* Für $a - 2 = 0$ bzw. $a = 2$ ergibt sich der Widerspruch $1 = 0$. Diesen Fall hat man oben schon betrachtet, die Geraden sind parallel.

*2. Fall:* Für $a \neq 2$ vereinfacht man weiter:

$$s = \frac{1}{a-2}$$

In (I) eingesetzt ergibt sich:

$$r = \frac{1}{a-2}$$

Die Probe in (III) stimmt auch.

Für $a \neq 2$ hat das LGS eine Lösung, die Geraden schneiden sich.

**Lösung zu Test 1**

a) B, F $\in$ BF
A, C, D, E, G, H $\notin$ BF

b) Für beliebiges t hat ein Punkt auf BF die Koordinaten (4 | 4 | t).

c) R ist die Mitte der Grundseite und liegt somit nicht auf der Kante BF.

$$\text{BF: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ R(2 \mid 2 \mid 0) \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{array}{ll} \text{(I)} & 2 = 4 \\ \text{(II)} & 2 = 4 \\ \text{(III)} & 0 = 4r \end{array}$$

In (I) und (II) ergibt sich jeweils eine falsche Aussage. Damit ist R $\notin$ BF.

d) S liegt auf der Kante BF, eine Einheit über dem Punkt B.

$$\text{BF: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ S(4 \mid 4 \mid 1) \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 = 4 \\ \text{(II)} & 4 = 4 \\ \text{(III)} & 1 = 4r \end{array}$$

In (I) und (II) ergibt sich jeweils eine wahre Aussage. Aus (III) folgt r = 0,25 und damit S $\in$ BF.

e) AG ist eine der Diagonalen im Würfel:

$$\text{AG: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P_1(1 \mid 3 \mid 2) \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{llll} \text{(I)} & 1 = 4 - 4r & \Rightarrow & r = 0{,}75 \\ \text{(II)} & 3 = 4r & \Rightarrow & r = 0{,}75 \\ \text{(III)} & 2 = 4r & \Rightarrow & r = 0{,}5 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ P_1 \notin \text{BF}$$

$$P_2(3 \mid 1 \mid 1) \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{llll} \text{(I)} & 3 = 4 - 4r & \Rightarrow & r = 0{,}25 \\ \text{(II)} & 1 = 4r & \Rightarrow & r = 0{,}25 \\ \text{(III)} & 1 = 4r & \Rightarrow & r = 0{,}25 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ P_2 \in \text{BF}$$

**Lösung zu Test 2:**

a) identisch mit BF: BF
schneidet BF: AB, BC, EF, FG
parallel zu BF: AE, CG, DH
windschief zu BF: CD, DA, GH, HE

b) AG ist die Raumdiagonale des Würfels von vorne unten links nach hinten oben rechts. CD ist die hintere untere Kante – sie verläuft somit weder parallel zur Geraden AG noch schneidet sie AG.

$$AG: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}, \quad CD: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} \text{(I)} & 4-4r=0 & \Leftrightarrow\ 4=0 \\ \text{(II)} & 4r=4-4s & \Leftrightarrow\ s=1 \\ \text{(III)} & 4r=0 & \Leftrightarrow\ r=0 \end{array}$$

Dieses LGS hat keine Lösungen, die Geraden haben keinen Schnittpunkt. Da die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, müssen die Geraden windschief sein.

c) AH ist die Diagonale auf der linken Seitenfläche. Die Diagonale auf der rechten Seitenfläche, BG, ist parallel zu AH.

$$AH: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}, \quad BG: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4-4r=-4-4s \\ \text{(II)} & 0=4 \\ \text{(III)} & 4r=4s \end{array}$$

Dieses LGS hat keine Lösungen (siehe (II)). Die Geraden haben keinen Schnittpunkt. Da die Richtungsvektoren kollinear sind, sind die Geraden parallel.

d) AG ist eine Raumdiagonale, DF eine zweite Raumdiagonale. Beide verlaufen durch den Mittelpunkt M(2 | 2 | 2) des Würfels und schneiden sich somit in M.

$$AG: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}, \quad DF: \vec{x} = s\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 4-4r=4s \Rightarrow & \Rightarrow\ 4-4r=2 \ \Rightarrow\ r=0{,}5 \\ \text{(II)} & 4r=4s \Rightarrow \text{(I)}+\text{(II)}:\ 4=8s \Rightarrow s=0{,}5 & \\ \text{(III)} & 4r=4s & \end{array}$$

Dieses LGS hat eine Lösung mit $r = 0{,}5$ und $s = 0{,}5$. Die Geraden haben einen Schnittpunkt. Setzen wir $s = 0{,}5$ in DF ein, dann ergibt sich als Schnittpunkt M(2 | 2 | 2).

e) $$AG: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 4-4r=2+s \ \Rightarrow\ s=2-4r & \\ \text{(II)} & 4r=2-s \ \Rightarrow & \Rightarrow\ 4r=2-2+4r \ \Rightarrow\ 0=0 \\ \text{(III)} & 4r=2-s \ \Rightarrow & \Rightarrow\ 4r=2-2+4r \ \Rightarrow\ 0=0 \end{array}$$

Dieses LGS hat unendlich viele Lösungen, AS und g sind identisch.