JAG
JOHANNES ALTHUSIUS GYMNASIUM

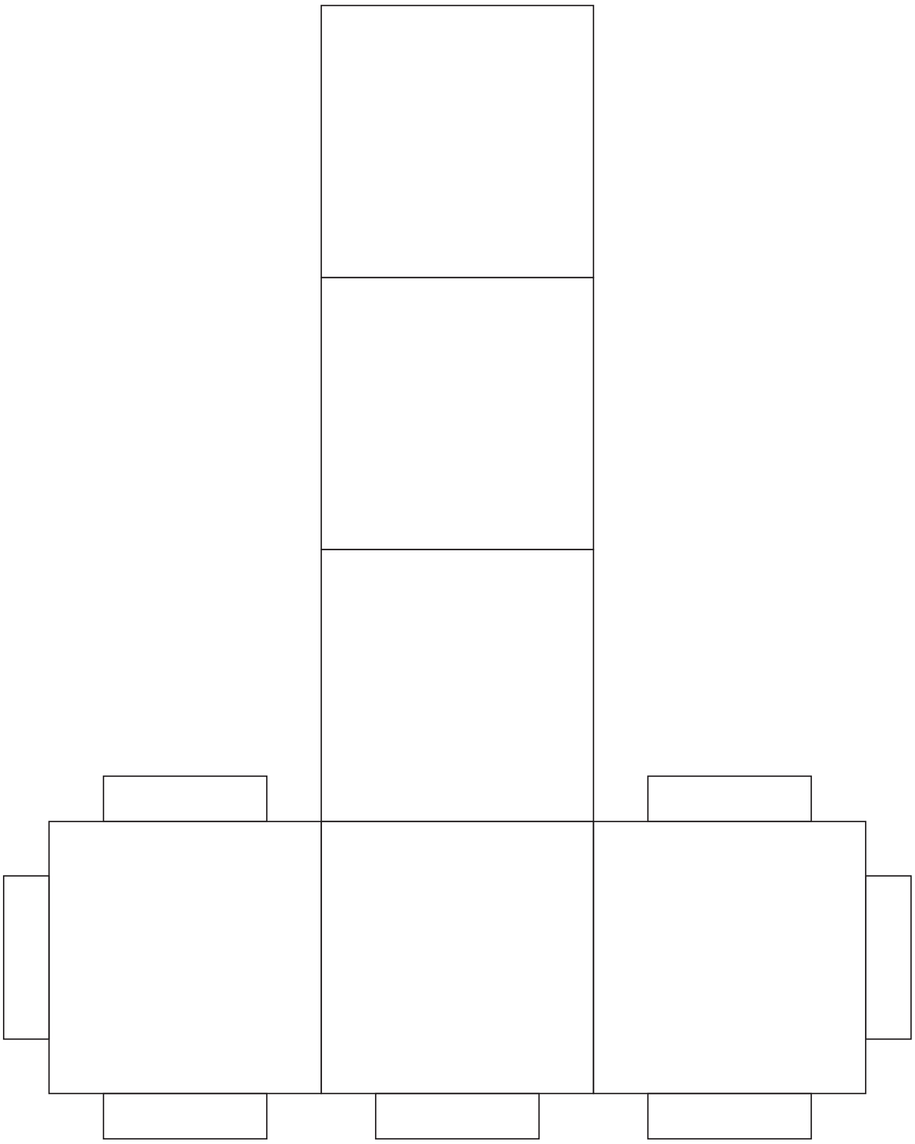
Stationsarbeit: **Punkte und Geraden im Raum**

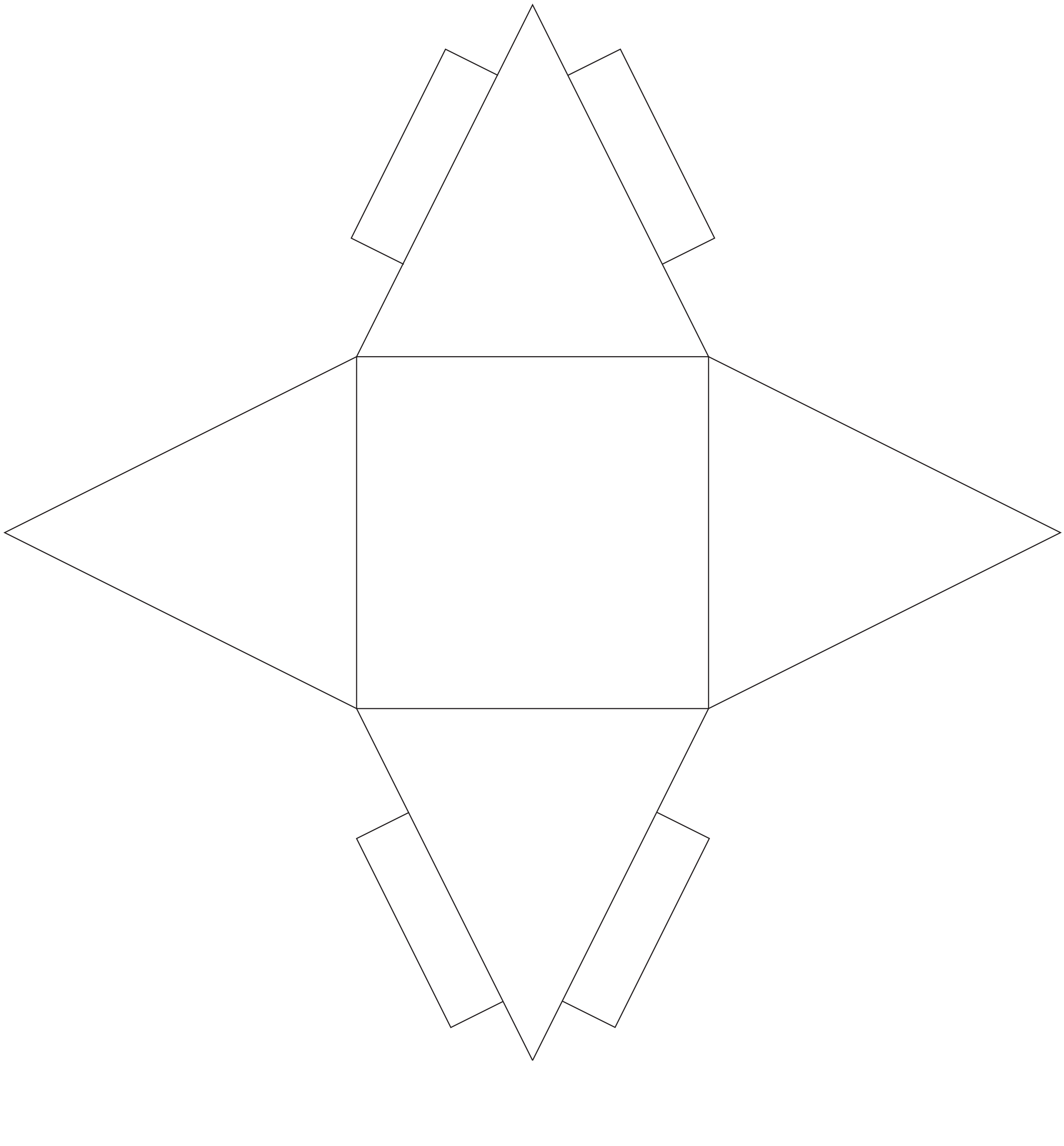
Aufgabentyp	**Material**	**Thema/Lernziel**	**Zeit in Min.**		**Datum**
			Soll	**Ist**	
Pflichtaufgabe 1	P 1	Netz von Pyramide und Würfel; Anfertigen von Körpern	10		
Pflichtaufgabe 2	P 2	Schrägbilder zu Pyramide und Würfel erstellen; Parametergleichungen von Geraden aufstellen	35		
Pflichtaufgabe 3	P 3	Lagebeziehungen von Punkten und Geraden untersuchen: anschaulich und rechnerisch	50		
Vertiefungsaufgabe 1	V 1	Lageuntersuchung von Punkten mit Parametern und Geraden –	50		
Test 1	Test 1	Lernerfolgskontrolle	15		
Pflichtaufgabe 4	P 4	Lagebeziehungen zwischen Geraden untersuchen: anschaulich und rechnerisch	50		
Vertiefungsaufgabe 2	V 2	Geraden mit vorgegebenen Lagebeziehungen aufstellen; Lagebeziehungen von Geraden mit Parametern untersuchen	30		
Test 2	Test 2	Lernerfolgskontrolle	20		

Pflichtaufgabe 1: Modelle zu Pyramide und Würfel

Aufgabe

Erstellen Sie mithilfe der folgenden Netze einen Würfel bzw. eine Pyramide und bringen Sie die fertigen Modelle in die nächste Unterrichtsstunde mit.





Pflichtaufgabe 2: Schrägbilder zu Pyramide und Würfel

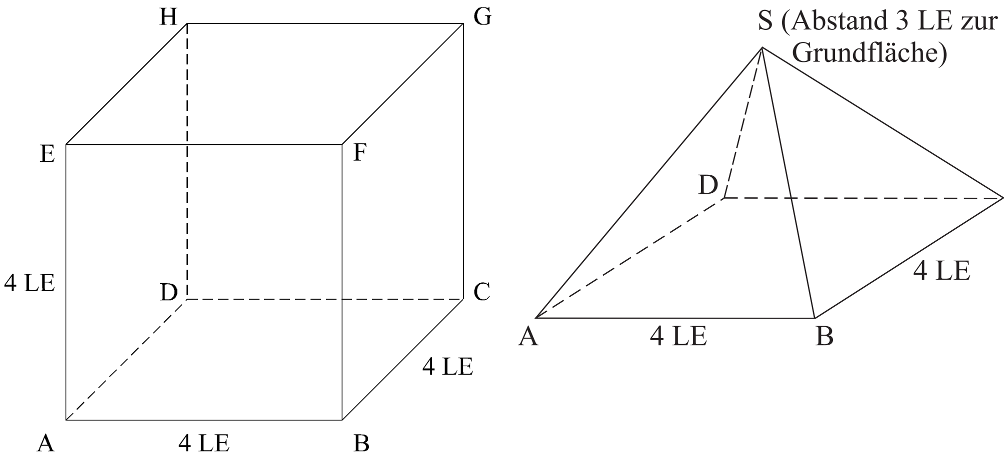
Aufgabe

a) Übertragen Sie die Schrägbilder des Würfels und der geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche jeweils in ein räumliches Koordinatensystem. Die Punkte D sollen jeweils im Ursprung liegen.

b) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte an.

c) Bestimmen Sie die Parametergleichungen der Kantengeraden (Geraden, die sich aus den Verlängerungen der Kanten ergeben).

d) Beschriften Sie die Ecken des Pyramiden- und des Würfelmodells aus Pflichtaufgabe 1 mit den entsprechenden Namen der Punkte.



Hinweise

- Die Ergebnisse dieser Aufgabe benötigen Sie immer wieder. Stellen Sie sie deshalb auf einem separaten Blatt übersichtlich dar.
- Wenn Sie eine Gerade mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ haben, dann können Sie statt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auch $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schreiben.
- Den Richtungsvektor einer Geraden kann man jederzeit durch einen Vektor ersetzen, der ein Vielfaches des ursprünglichen Richtungsvektors ist.

  Beispiel: Anstatt von $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verwenden.

Pflichtaufgabe 3: Lagebeziehungen von Punkten und Geraden

Aufgabe

Arbeiten Sie mit dem selbst angefertigten Pyramidenmodell aus Pflichtaufgabe 1 und dem Schrägbild der Pyramide aus Pflichtaufgabe 2. Beachten Sie auch die unten stehenden Hinweise.

a) Beschreiben Sie bei der Pyramide – in Worten, ohne mathematische Notation – die Lagebeziehungen der Punkte A, B, C, D und S zur Kantengeraden AS!

b) Ordnen Sie die Lagebeziehungen der Punkte A, B, C, D und S zu AS den beiden Hauptfällen zu und schreiben Sie dies in Kurznotation auf!

c) Wenn z. B. die Flugrouten von Raumsonden zu einem Planeten untersucht werden, ist es zunächst wichtig zu überprüfen, ob die Planetenposition auf der Flugbahn liegt oder nicht. Erläutern Sie, welche Konsequenzen sich aus den beiden möglichen Fällen ergeben. Nennen Sie ein weiteres Anwendungsbeispiel!

d) Bestimmen Sie für die Gerade AS die Punkte, die sich für $r \in \{0; 1; 0{,}5; -1\}$ ergeben. Zeichnen Sie diese Punkte in das Schrägbild ein. Beschreiben Sie deren Lage.

e) Erläutern Sie am Pyramidenmodell, dass der Punkt S nicht auf der Geraden AB liegt. Zeigen Sie dies auch rechnerisch.

f) Erläutern Sie am Pyramidenmodell, dass der Punkt R(5 | 0 | 0) auf AD liegt. Zeigen Sie dies auch rechnerisch.

g) Untersuchen Sie bei der Pyramide rechnerisch, ob die Punkte $P_1(1 \mid 3 \mid 4{,}5)$ und $P_2(0 \mid 4 \mid 5{,}5)$ auf der Geraden AS liegen.

Hinweise

- Die Lagebeziehungen von Punkt und Gerade kann man auf zwei Hauptfälle zurückführen:
  Fall 1: Ein Punkt P liegt auf der Geraden g (kurz: $P \in g$).
  Fall 2: Ein Punkt P liegt nicht auf der Geraden g (kurz: $P \notin g$).
- Bei diesem einfachen Ordnungsschema lässt man detailliertere Betrachtungsweisen wie z. B. in Bezug auf den Abstand („P liegt nahe bei g") bewusst weg. Für einen ersten Überblick reicht diese Einteilung aus. Die genauere Betrachtung des Abstandes wird später noch erfolgen.
- Die Parametergleichung einer Geraden
  $$g\colon \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u};\ \ r \in \mathbb{R}$$
  gibt für verschiedene Werte des Parameters r die Ortsvektoren der Punkte X auf der Geraden an.

  Beispiel:

  Gerade AS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r = -2$:

  $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

  Zum Parameterwert –2 gehört der Punkt X(8 | – 4 | – 6).
- Untersucht man umgekehrt, ob ein Punkt auf der Geraden liegt, so sucht man nach dem zugehörigen Parameter. Liegt der Punkt nicht auf der Geraden, dann lässt sich kein Parameter finden.

Beispiel:

Am Pyramidenmodell erkennt man, dass der Punkt B(4 | 4 | 0) nicht auf der Geraden AS liegt. Es lässt sich kein r finden, das zum Punkt B führt. Um dies rechnerisch nachzuweisen, stellt man die Vektorgleichung $\overrightarrow{OB} = \vec{p} + r\vec{u}$ auf:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Etwas unpräzise wird dies folgendermaßen formuliert: „Man setzt den Punkt mit der Geraden gleich.“ Besser: „Man setzt den Ortsvektor des Punktes in die Parametergleichung der Geraden ein.“ Aus dieser Vektorgleichung bildet man zeilenweise das zugehörige lineare Gleichungssystem (Abkürzung: LGS) mit drei Zeilen und einer Unbekannten:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & 4 = 4 - 2r & \Rightarrow \quad 0 = -2r & \Rightarrow \quad r = 0 \\ \text{(II)} & 4 = 0 + 2r & \Rightarrow \quad 4 = 2r & \Rightarrow \quad r = 2 \\ \text{(III)} & 0 = 0 + 3r & \Rightarrow \quad 0 = 3r & \Rightarrow \quad r = 0 \end{array}$$

Zeilenweise gelöst ergibt sich kein gemeinsamer Wert für r. Das LGS hat keine Lösung, der Punkt B liegt somit nicht auf der Geraden AS (kurz: B $\notin$ AS). Hätte sich hingegen ein gemeinsamer Wert für r ergeben (z. B. in (II) auch r = 0), dann läge der Punkt B auf der Geraden AS.

Um zu überprüfen, ob ein Punkt Q auf der Geraden g: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ liegt,
- setzen Sie den Ortsvektor $\overrightarrow{OQ}$ mit der Geraden gleich: $\overrightarrow{OQ} = \vec{p} + r\vec{u}$,
- bilden dann das zugehörige LGS (3 Zeilen, 1 Unbekannte)
- und lösen dieses LGS zeilenweise.
- Wenn das LGS keine Lösung hat, gilt $Q \notin g$, wenn es eine Lösung hat, gilt $Q \in g$.

Hinweis zum weiteren Vorgehen

Sie haben nun die Pflichtaufgabe des Kapitels „Lagebeziehungen von Punkten und Geraden“ bearbeitet.
- Überprüfen Sie anhand des **Lösungsblatts**, ob Sie die Aufgaben richtig gelöst haben.
- Ergänzend zu den Pflichtaufgaben können Sie die **Vertiefungsaufgabe 1** lösen.
- Als Abschluss des Kapitels lösen Sie bitte **Test 1**. Die Lösungen geben Sie Ihrem Lehrer zur Korrektur.
- Wenn Sie die Mehrzahl der Aufgaben richtig gelöst haben, wird es Zeit für das Kapitel „**Lagebeziehungen zwischen Geraden**“.

Vertiefungsaufgabe 1: Punkte mit Parametern

Aufgabe

Manchmal liegen nicht alle Koordinaten eines Punktes vor. Aus der Zusatzinformation, dass sich der Punkt auf einer Geraden befindet, kann man jedoch die fehlenden Koordinaten ableiten.
(Arbeiten Sie wieder mit dem Schrägbild der Pyramide und dem Pyramidenmodell.)

a) Bestimmen Sie für den Punkt $T(x_1 \mid 0{,}8 \mid x_3)$, der auf der Geraden CS liegt, die fehlenden Koordinaten.

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $U(2 + u \mid 2 + u \mid u)$ für $u = 1$ auf BS liegt. Ist dies nicht der Fall, dann bestimmen Sie denjenigen Wert von u, für den U auf BS liegt.

c) Untersuchen Sie, ob es einen Wert von v gibt, für den der Punkt
$V(1 + v \mid 1 + v \mid 1{,}5\, v)$ auf DS liegt.

d) Bearbeiten Sie mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) nochmals die Teilaufgaben a bis c.

Hinweise zu den Teilaufgaben a bis c

Ist von einem Punkt P auf einer Geraden g mindestens eine Koordinate bekannt bzw. hängen die Koordinaten von P von einem Parameter a ab, so erhält man die restlichen Koordinaten bzw. die möglichen Werte von a durch Gleichsetzen von $\overrightarrow{OP}$ mit der Parameterform von g.

Beispiel 1:
Der Punkt Q hat die x_1-Koordinate 1 und liegt auf der Geraden DS. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten von Q!

Als Ansatz für den Punkt Q legt man $Q(1 \mid x_2 \mid x_3)$ fest.

$$\text{DS: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 = 2r \\ \text{(II)} & x_2 = 2r \\ \text{(III)} & x_3 = 3r \end{array}$$

Aus Gleichung (I) ergibt sich $r = 0{,}5$. Setzt man dies in (II) und (III) ein, so erhält man die weiteren Koordinaten $x_2 = 1$ und $x_3 = 1{,}5$. Der gesuchte Punkt Q hat also die Koordinaten $Q(1 \mid 1 \mid 1{,}5)$.

Beispiel 2:
Vom Punkt R sei bekannt, dass er auf der Geraden CS liegt und dass seine Koordinaten dem Gesetz $R(4 - a \mid a \mid a)$ gehorchen. Bestimmen Sie den Wert von a!

$$\text{CS: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4-a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 - a = 2r \\ \text{(II)} & a = 4 - 2r \\ \text{(III)} & a = 3r \end{array}$$

Um dieses LGS mit zwei Unbekannten zu lösen, kann man das Gaußverfahren anwenden – oder schneller:
Aus (III) folgt $a = 3\, r$. Setzt man dies in (II) ein, so ergibt sich:

$$3\,r = 4 - 2\,r \quad \Rightarrow \quad 5\,r = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 0{,}8$$

Damit kann man in (III) den Wert von a bestimmen: $a = 2{,}4$
Zuletzt zeigt man, dass diese Ergebnisse auch (I) lösen:

$$4 - 2{,}4 = 2 \cdot 0{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}6 = 1{,}6$$

Für $a = 2{,}4$ liegt der Punkt R auf DS. R hat demnach die Koordinaten $R(1{,}6 \mid 2{,}4 \mid 2{,}4)$.

Test 1

Erlaubte Hilfsmittel: Würfelmodell, Schrägbild des Würfels, Ausarbeitungen zu P 2
Zeitliche Vorgabe: ca. 15 Minuten

Arbeiten Sie mit dem Schrägbild des Würfels und mit dem Würfelmodell!

a) Schreiben Sie die Lagebeziehungen der Punkte A bis H zur Geraden BF in Kurznotation auf!

b) Geben Sie die Koordinaten von vier Punkten an, die auf der Geraden BF liegen.

c) Erläutern Sie am Würfelmodell, dass der Punkt $R(2 \mid 2 \mid 0)$ nicht auf der Geraden BF liegt. Zeigen Sie dies auch rechnerisch.

d) Erläutern Sie am Würfelmodell, dass der Punkt $S(4 \mid 4 \mid 1)$ auf BF liegt. Zeigen Sie dies auch rechnerisch.

e) Untersuchen Sie beim Würfel rechnerisch, ob die Punkte $P_1(1 \mid 3 \mid 2)$ und $P_2(3 \mid 1 \mid 1)$ auf der Geraden AG liegen.

Pflichtaufgabe 4: **Lagebeziehungen zwischen Geraden**

Aufgabe

a) Beschreiben Sie bei der Pyramide – in Worten, ohne mathematische Notation – für verschiedene Paare von Kantengeraden g und h die Lagebeziehung der Kantengeraden zueinander.

g	h	Beschreibung der Lagebeziehung
AB	AS	
AB	BS	
AB	CS	
AB	DS	
AB	AB	
AB	BC	
AB	CD	
AB	DA	
BC	AS	
BC	BS	
BC	CS	
BC	DS	
BC	AB	
BC	BC	
BC	CD	
BC	DA	

b) Überlegen Sie sich ein Ordnungsschema für die Lagebeziehungen der Geradenpaare. Welche Gemeinsamkeiten gibt es? Nach welchen Kriterien lassen sich die Geradenpaare ordnen?

c) Nachdem Sie in der vorhergehenden Aufgabe ein eigenes Ordnungsschema entwickelt haben, sollen Sie sich jetzt mit einem Lehrtext beschäftigen. Fassen Sie den nachfolgenden Lehrtext kurz und knapp zusammen, sodass Sie eine Übersicht über die darin erwähnten vier Hauptfälle haben. Schreiben Sie ebenfalls kurz und übersichtlich auf, wie man vorgehen muss, um die Lage zweier Geraden diesen vier Hauptfällen zuzuordnen.

d) Ordnen Sie die Geradenpaare aus a den vier Lagebeziehungen zu!

e) Erläutern Sie am Beispiel der Flugrouten zweier Flugzeuge, welche Konsequenzen sich aus den vier möglichen Lagebeziehungen ergeben.

f) Erläutern Sie am Pyramidenmodell, dass die Geraden BC und DA parallel sind. Zeigen Sie dies auch rechnerisch.

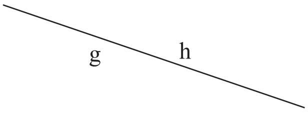
g) Erläutern Sie am Pyramidenmodell, dass die Geraden BC und DS windschief sind. Zeigen Sie dies auch rechnerisch.

h) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden DS und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

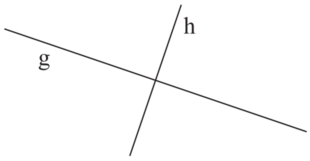
i) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden DS und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrtext

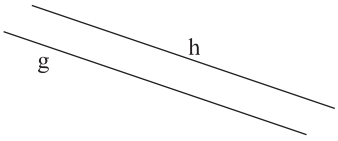
Betrachtet man zwei Geraden g und h in der Ebene (im **zweidimensionalen Raum**), so unterscheidet man **drei Fälle**:



g und h sind **identisch**.



g und h **schneiden** sich.



g und h sind **parallel**.

Bei zwei Geraden im **dreidimensionalen Raum** gibt es noch einen **vierten Fall**:
Die Gerade h ist weder parallel zu g, noch hat sie einen Schnittpunkt mit g. Sie verläuft „schief" an g vorbei, man sagt: „g und h sind zueinander **windschief**".

An der Pyramide können wir diese vier Fälle veranschaulichen:

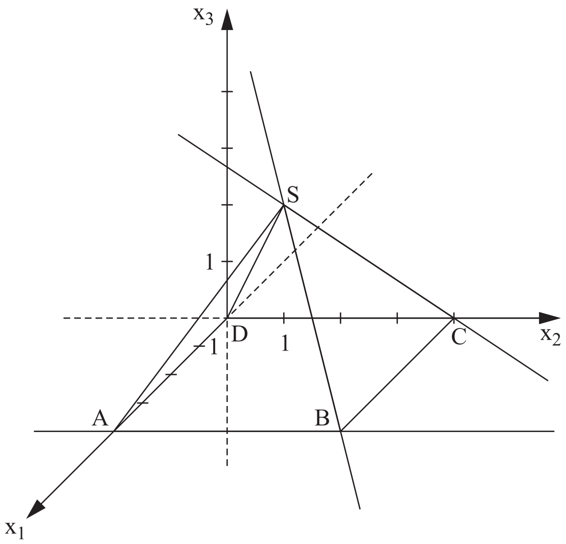
1. Fall: Die Geraden AB und BA sind **identisch**.

2. Fall: Die Geraden AB und BS **schneiden** sich.

3. Fall: Die Geraden AB und CD sind **parallel** (AB || CD).

4. Fall: Die Geraden AB und CS sind **windschief**.

Diese vier möglichen Lagen von Geraden unterscheiden sich in der Anzahl der gemeinsamen Punkte und im Verhältnis ihrer Richtungsvektoren zueinander.



JOHANNES ALTHUSIUS GYMNASIUM

1. **Untersuchung des Verhältnisses der Richtungsvektoren zweier Geraden**
Gegeben seien zwei Geraden g: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$.
Bei identischen sowie bei parallelen nicht identischen Geraden zeigen die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in dieselbe (oder entgegengesetzte) Richtung. Dazu müssen die Richtungsvektoren **kollinear** (d. h. Vielfache voneinander) sein. Die Vektorgleichung $\vec{u} = k\vec{v}$ hat dann eine Lösung für k.

Beispiel 1:

Wenn die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ heißen, dann sind sie kollinear, also Vielfache voneinander: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Damit sind die zugehörigen Geraden identisch oder parallel (nicht identisch).

Beispiel 2:

Wenn die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ heißen, dann sind diese nicht kollinear, d. h. keine Vielfachen voneinander. Damit gilt für die zugehörigen Geraden, dass sie sich schneiden oder windschief sind.

2. **Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Punkte**
Um die Anzahl der gemeinsamen Punkte zu bestimmen, untersucht man, welche Punkte X der Geraden g: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ auch auf der Geraden h: $\vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$ liegen. Dazu setzt man die Geraden gleich, d. h. man stellt die Vektorgleichung

$$\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + s\vec{v}$$

auf. Diese Vektorgleichung wird in ein LGS umgewandelt und gelöst. Die Anzahl der Lösungen des LGS entspricht der Anzahl der gemeinsamen Punkte der beiden Geraden:

1. Fall: Hat das LGS **unendlich viele Lösungen** für r und s, so gibt es unendlich viele gemeinsame Punkte. Die Geraden sind **identisch**.

2. Fall: Hat das LGS **genau eine Lösung** für r und s, so gibt es genau einen gemeinsamen Punkt. Die Geraden **schneiden** sich.

3. Fall: Hat das LGS **keine Lösung** für r und s, so gibt es keinen gemeinsamen Punkt. Die Geraden sind entweder **echt parallel (nicht identisch)** oder **windschief**.

Vorsicht Falle! Manchmal kommt es vor, dass die Parameter zweier Geraden g: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{q} + r\vec{v}$ dieselbe Bezeichnung haben (hier: jeweils r). Bevor man die Vektorgleichung und das LGS aufstellt, muss man einen der beiden Parameter umbenennen (z. B. bei h den Parameter r in s, also h: $\vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$).

Beispiel 1:

Gegeben sind die Geraden AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und BA: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Vektorgleichung $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu folgendem LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 + 0 \cdot r = 4 + 0 \cdot s \\ \text{(II)} & 0 + 4 \cdot r = 4 - 4 \cdot s \\ \text{(III)} & 0 + 0 \cdot r = 0 + 0 \cdot s \end{array}$$

Dieses LGS wird vereinfacht:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 = 4 \\ \text{(II)} & r = 1 - s \\ \text{(III)} & 0 = 0 \end{array}$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen (z. B. $s = 0,\ r = 1$ und $s = 1,\ r = 0$ und $s = 2,\ r = -1$ …), da die Gleichungen (I) und (III) immer richtig sind und (II) für beliebige Werte von s und für r = 1 – s richtig ist. Damit ist der rechnerische Nachweis erbracht, dass die Geraden AB und BA **identisch** sind.

Beispiel 2:

Gegeben sind die Geraden $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ und $BS: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll}(I) & 4 = 4 - 2s\\ (II) & 4r = 4 - 2s\\ (III) & 0 = 3s\end{array}$$

Aus (III) ergibt sich:

$s = 0$

Eingesetzt in (II):

$4r = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 1$

Überprüft man diese Lösung in (I) ($4 = 4$), so bestätigen sich $s = 0$ und $r = 1$ als **einzige Lösung** des LGS. Damit hat man nachgewiesen, dass sich die Geraden **schneiden**. Um den Schnittpunkt zu bestimmen, setzt man $s = 0$ oder $r = 1$ in die Geradengleichungen ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} \text{ oder } \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (4 | 4 | 0) (dies ist gerade der Punkt B).

Beispiel 3:

Gegeben sind die Geraden $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ und $CD: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$.

Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll}(I) & 4 = 0\\ (II) & 4r = 4 - 4s\\ (III) & 0 = 0\end{array}$$

Anhand von (I) kann man erkennen, dass dieses LGS keine **keine Lösung** hat. Damit hat man nachgewiesen, dass die Geraden keinen gemeinsamen Punkt besitzen, also entweder parallel oder windschief sind. Berücksichtigt man zusätzlich, dass die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ von AB und CD **kollinear** sind, folgt: Die Geraden sind **parallel**.

Beispiel 4:

Gegeben sind die Geraden $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $CS: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 = 2s \\ \text{(II)} & 4r = 4 - 2s \\ \text{(III)} & 0 = 3s \end{array}$$

Aus (I) folgt:

$s = 2$

Eingesetzt in (II) ergibt sich:

$4r = 4 - 4 \Rightarrow 4r = 0 \Rightarrow r = 0$

Bei der Probe in (III) zeigt sich aber der Widerspruch 0 = 6. Dieses LGS hat somit **keine Lösung**. Die Geraden besitzen keinen gemeinsamen Punkt, sie sind parallel oder windschief.

Da die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **nicht kollinear** sind, sind die Geraden zueinander **windschief**.

Hinweis zum weiteren Vorgehen

Sie haben nun die Pflichtaufgabe des Kapitels „Lagebeziehungen zwischen Geraden“ bearbeitet.

- Überprüfen Sie anhand des **Lösungsblatts**, ob Sie die Aufgaben richtig gelöst haben.
- Ergänzend zu den Pflichtaufgaben können Sie die **Vertiefungsaufgabe 2** und die **GTR-Aufgabe** bearbeiten.
- Als Abschluss des Kapitels lösen Sie bitte **Test 2**. Die Lösungen geben Sie Ihrem Lehrer zur Korrektur.
- In einer abschließenden **Hausaufgabe** können Sie das neu Erlernte anwenden und vertiefen.

Damit haben Sie diese Planarbeit beendet. Sie haben bewiesen, dass Sie in der Lage sind, sich mathematische Themen gezielt und selbstständig zu erarbeiten.

Vertiefungsaufgabe 2: Komplexere Aufgaben mit Geraden

Aufgabe

Analog zu Vertiefungsaufgabe 1 werden Sie sich wieder mit Aufgaben beschäftigen, die unvollständige Informationen, diesmal über die Geraden, enthalten.

a) Geben Sie zur Geraden AC im Würfel drei Geraden h_1, h_2 und h_3 an, die jeweils durch G und eine weitere Ecke des Würfels verlaufen und für die gilt:
h_1 schneidet sich mit AC, h_2 ist parallel zu AC und h_3 ist windschief zu AC.

b) Geben Sie zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ jeweils eine Gerade h_1, h_2 und h_3 an, die durch den Punkt P(1 | 0 | 1) verläuft und sich mit g schneidet, parallel zu g oder windschief zu g ist.

c) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ und } h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von a.

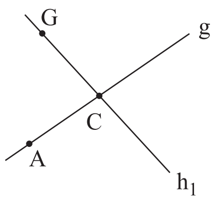
Hinweise

Konstruktion von Geraden

Gegeben sei eine Gerade g: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ (z. B. die Gerade AC im Würfel – eine Diagonale der Bodenfläche). Gesucht ist jeweils eine Gerade h: $\vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$, die durch einen bestimmten Punkt verläuft und sich entweder mit g schneidet oder parallel bzw. windschief zu g ist. Es gibt jeweils viele richtige Lösungen. Sie können diese Aufgaben anhand eines Schaubildes oder auch rechnerisch lösen.

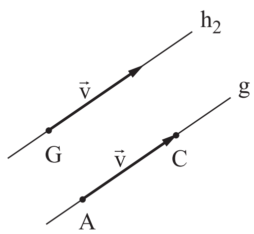
- Eine Gerade h: $\vec{x} = \vec{q} + r\vec{v}$, die durch einen Punkt G verlaufen und sich mit g schneiden soll, wird folgendenmaßen konstruiert:
  – Als Stützvektor wählt man den Ortsvektor von G: $\vec{q} = \overrightarrow{OG}$
  – Als Richtungsvektor wählt man einen beliebigen Punkt $P \in g$ und bildet den Verbindungsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{GP}$.

  Beispiel:
  Der Punkt C liegt auf AC.
  $\Rightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{GC} \quad \Rightarrow \quad h_1: \vec{x} = \overrightarrow{OG} + r \cdot \overrightarrow{GC};\ r \in \mathbb{R}$



- Eine Gerade h: $\vec{x} = \vec{q} + r\vec{v}$, die durch einen Punkt G verlaufen und zu g parallel sein soll, wird wie folgt gebildet:
  – Als Stützvektor wählt man wieder den Ortsvektor von G: $\vec{q} = \overrightarrow{OG}$
  – Als Richtungsvektor $\vec{v}$ wählt man den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.

  Beispiel:
  $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad h_2: \vec{x} = \overrightarrow{OG} + r \cdot \overrightarrow{AC};\ r \in \mathbb{R}$
  (h_2 ist identisch mit EG.)



- Eine Gerade h: $\vec{x} = \vec{q} + r\vec{v}$, die durch den Punkt G verlaufen und zu g windschief sein soll, lässt sich ohne ein Schaubild nicht so einfach schematisieren:
  - Als Stützvektor wählt man wieder den Ortsvektor von G: $\vec{q} = \overrightarrow{OG}$
  - Als Richtungsvektor wählt man einen Vektor, der zum Richtungsvektor von g nicht kollinear ist.
  - Danach überprüft man, ob h zu g windschief ist (h könnte g auch „zufällig" schneiden).

  Falls die Geraden einen Schnittpunkt haben, muss der Richtungsvektor variiert und die Lagebeziehung erneut überprüft werden.

  Beispiel:

  $\vec{v} = \overrightarrow{GH} \quad \Rightarrow \quad h_3\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OG} + r \cdot \overrightarrow{GH};\ r \in \mathbb{R}$ (h_3 ist identisch mit GH.)

Lagebeziehung zweier Geraden mit Scharparameter

Bei der Lageuntersuchung zweier Geraden g und h kann eine der Geraden auch mit einem zusätzlichen Scharparameter versehen sein. Damit hängt die Lagebeziehung vom Wert des Scharparameters a ab.

Beispiel:

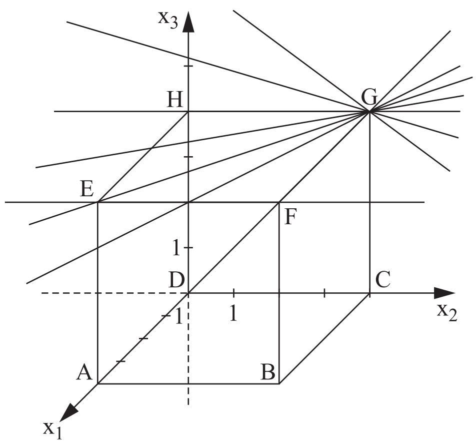
Gerade g = EF:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geradenschar h_a:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Alle Geraden h_a liegen auf der Deckfläche des Würfels und verlaufen durch den Punkt G(0 | 4 | 4).)



Betrachtet werden zunächst die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für a = 1 sind $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ kollinear, die Geraden sind somit identisch oder parallel.

Dass die Geraden für a = 1 parallel sind, kann man anhand der Zeichnung erkennen (für a = 1 ist h_1 die Gerade GH) bzw. rechnerisch nachweisen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 = 0 \\ \text{(II)} & 4r = 4 + s \\ \text{(III)} & 4 = 4 \end{array}$$

Dieses LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind für a = 1 parallel.
Für a ≠ 1 sind die Geraden windschief oder schneiden sich. Über das LGS kann man ermitteln, welche dieser beiden Lagebeziehungen zutrifft:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 = s(a-1) \\ \text{(II)} & 4r = 4 + s \\ \text{(III)} & 4 = 4 \end{array}$$

Um in der ersten Zeile nach s aufzulösen, teilt man durch (a – 1). Dazu muss man zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Für a – 1 = 0 ⇔ a = 1 ergibt sich der Widerspruch 4 = 0, das LGS hat keine Lösung. Diesen Fall hat man oben schon betrachtet, die Geraden waren parallel.

2. Fall: Für a – 1 ≠ 0 ⇔ a ≠ 1 ergibt sich $s = \frac{4}{a-1}$.

Eingesetzt in (II) erhält man:

$$4r = 4 + \frac{4}{a-1} \quad \Rightarrow \quad r = 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1}$$

Die Probe in (III) stimmt immer (4 = 4).
Für a ≠ 1 hat das LGS eine Lösung, für a ≠ 1 schneiden sich h_a und g.

Test 2

Erlaubte Hilfsmittel: Würfelmodell, Schrägbild des Würfels, Ausarbeitungen zu P 2
Zeitliche Vorgabe: ca. 20 Minuten

Arbeiten Sie mit dem Schrägbild des Würfels und mit dem Würfelmodell!

a) Geben Sie beim Würfel jeweils eine Kantengerade an, die
- mit BF identisch ist,
- BF schneidet,
- parallel zu BF ist,
- windschief zu BF ist.

b) Erläutern Sie am Würfelmodell, dass die Geraden AG und CD windschief sind. Zeigen Sie dies auch rechnerisch.

c) Geben Sie eine zur Geraden AH parallele Gerade an, die ebenfalls durch zwei Eckpunkte des Würfels verläuft.

d) Erläutern Sie am Würfelmodell die Lagebeziehung der Geraden AG und DF. Weisen Sie Ihre Überlegungen rechnerisch nach.

Bonusaufgabe:

e) Untersuchen Sie beim Würfel rechnerisch die Lagebeziehung der Geraden AG zur Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$